TRAVAUX DIRIGES			
ECUE : Robotique			*Classe(s) :* L3-MT
Enseignant(s) : Mehdia GHOZLANE			Correction
Date : 2017-2018	*Durée :*	*Nombre de pages :*	

Rappel

❖ Boucle cinématique : $b = l - n$

l est le nombre d'articulations et n est le nombre de corps mobiles, excluant la base.

❖ Nombre d.d.l. (mobilité) méthode des boucles

$N = \sum_{i=1}^{l} \nu_i$: Chaine cinématique ouverte

$N = \sum_{i=1}^{l} \nu_i - 6b$: Chaine cinématique fermée (mécanisme spatial).

$N = \sum_{i=1}^{l} \nu_i - 3b$: Chaine cinématique fermée (mécanisme plan).

ν_i d.d.l de l'articulation i.

❖ Nombre d.d.l. méthode de GRUBLER

$N = 6n - \sum_{i=1}^{l}(6 - \nu_i)$: Chaine cinématique fermée (mécanisme spatial)

$N = 3n - \sum_{i=1}^{l}(3 - \nu_i)$: Chaine cinématique fermée (mécanisme plan)

❖ Matrice de transformation homogène

$$M = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R : Matrice (3x3) des rotations

P : Matrice (3x1) des translations

❖ Les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace dans le repère Ri à partir de ces coordonnées homogènes exprimées dans le repère Rf

$$\begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \\ \acute{z} \\ 1 \end{pmatrix}_{R_i} = M_f^i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}_{R_f} = \begin{pmatrix} R_f^i & P_f^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}_{R_f}$$

❖ Matrice de transformation homogène de translation pure $Tr(a, b, c)$.

$$M = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = Tr(a,b,c) = \begin{pmatrix} & I_3 & & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} & I_3 & & \begin{matrix} a \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & I_3 & & \begin{matrix} 0 \\ b \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & I_3 & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ c \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Tr(a,b,c) = Tr(a,0,0) \times Tr(0,b,0) \times Tr(0,0,c)$

- Matrice de transformation homogène de rotation pure.

$$M = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $Rot(x, \theta_x)$: Rotation pure autour de l'axe x

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{pmatrix}$$

- $Rot(y, \theta_y)$: Rotation pure autour de l'axe y

$$R = \begin{pmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{pmatrix}$$

- $Rot(z, \theta_z)$: Rotation pure autour de l'axe z

$$R = \begin{pmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- l'application successive des rotations R1 puis R2 est équivalente à une rotation :

$$R = R_2 \times R_1$$

- La matrice M, peut être décomposée en un produit de deux matrices

$$M = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Convention de Khalil-Kleinfinger (DH modifiée)

Le repère R_i fixé au corps C_i est défini de telle sorte que :

- Z_i est porté par l'axe articulaire i
- X_i est porté par la perpendiculaire commune aux axes Z_i et Z_{i+1}.
- Y_i est l'axe qui forme un trièdre direct $Y_i = Z_i \wedge X_i$

- Paramètres de DH

- r_{i-1}: distance entre Z_{i-1} et Z_i mesure le long de X_{i-1}.
- α_{i-1}: angle entre Z_{i-1} et Z_i mesure autour de X_{i-1}.
- d_i: distance entre X_{i-1} et X_i mesure le long de Z_i.
- θ_i: angle entre X_{i-1} et X_i mesure autour de Z_i.

Exercice N°1

Calculer la mobilité des différentes chaines cinématique des robots suivants :

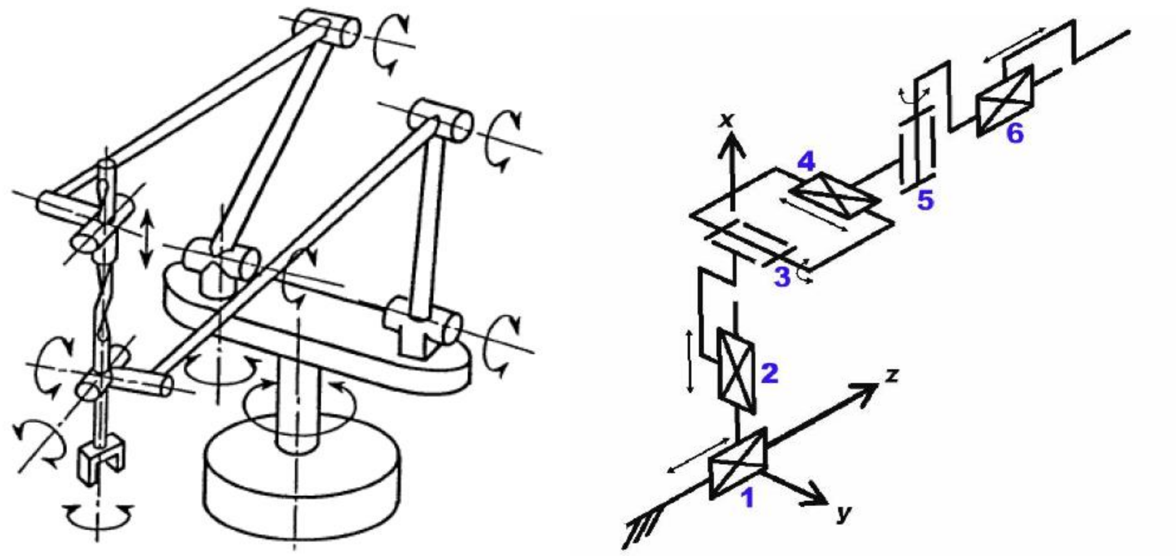
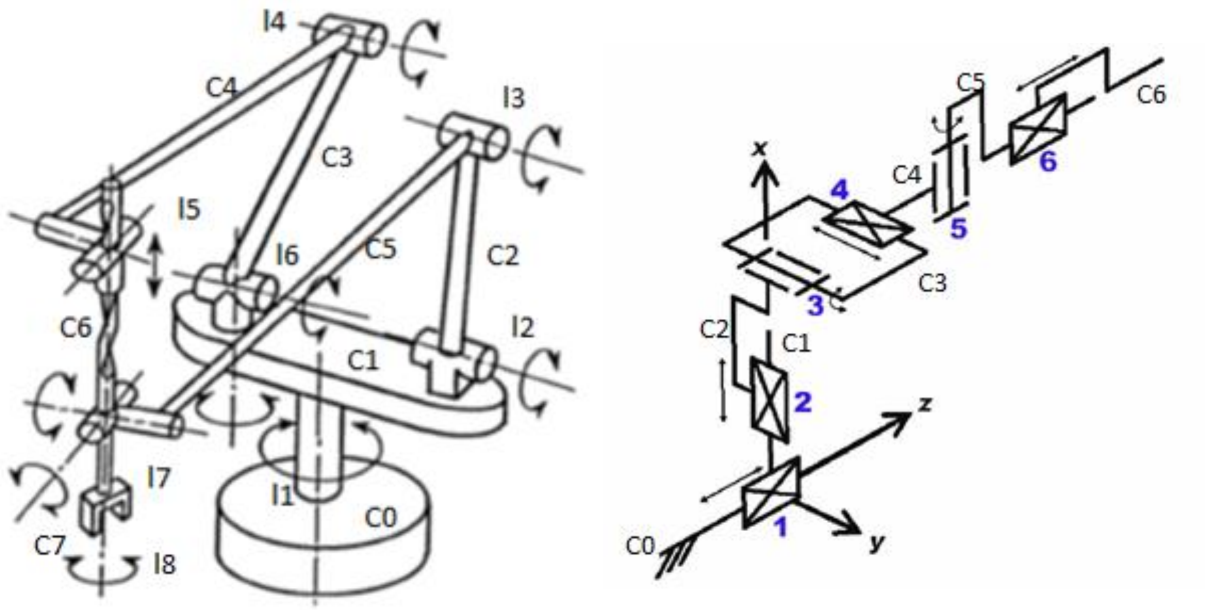


Figure 1 : a-Boucle fermé b-Boucle ouvert

a) $l = 8, n = 7, b = l - n\ , b = 1, N = \sum_{i=1}^{l} v_i - 6b, N = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1) - 6 \times 1$
$N = 4ddl$

b) $l = 6, n = 6, b = l - n\ , b = 0, N = \sum_{i=1}^{l} v_i - 6b, N = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) - 6 \times 0, N = 6ddl$



$l1$:Rotoide, $l2$:Rotoide, $l3$:Rotoide, $l4$:Rotoide, $l5$: Prismatique, $l6$: Cardan, $l7$: Cardan , $l8$:Rotoide

Exercice N°2

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ de coordonnées $(0, \quad 1, \quad 0)^T$ subit successivement une rotation de 90d autour de l'axe x, et de 90d autour de l'axe y. Donner la matrice de transformation globale. Vérifier graphiquement.

- $Rot(x, \theta_x) = R_1$: Rotation pure autour de l'axe x

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

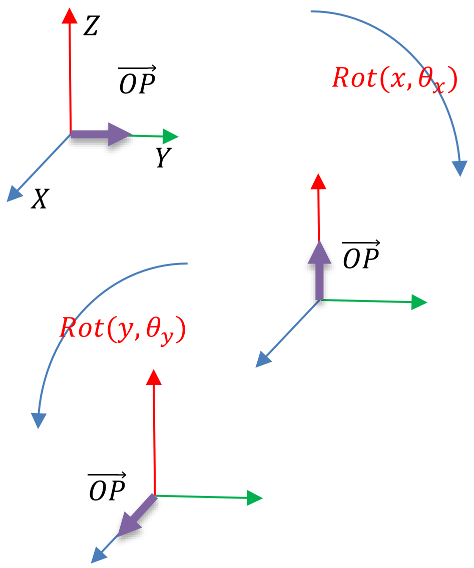
- $Rot(y, \theta_y) = R_2$: Rotation pure autour de l'axe y

$$R_2 = \begin{pmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = R_2 \times R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de transformation globale $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Exercice N°3

Vérifier que le vecteur $(1, \quad 0, \quad 0)^T$ peut être obtenu au départ de $(0, \quad 1, \quad 0)^T$ par rotation successives de 90d autour de l'axe y et de -90d autour de l'axe z.

- $Rot(y, \theta_y) = R_1$: Rotation pure autour de l'axe y

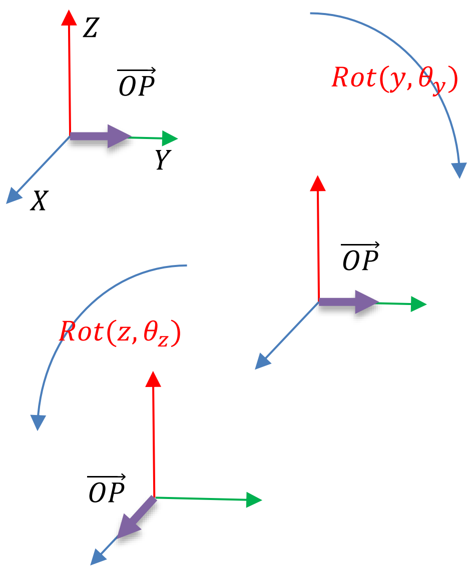
$$R_1 = \begin{pmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $Rot(z, \theta_z) = R_2$: Rotation pure autour de l'axe z

$$R_2 = \begin{pmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

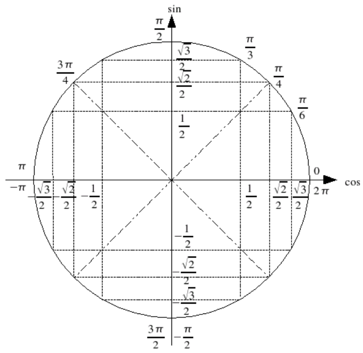
$$R = R_2 \times R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Exercice N°4

Trouver les composantes du vecteur $(1, \quad 1, \quad 0)^T$ après une translation de $(0, \quad 0, \quad 1)^T$ suivie d'une rotation de 60d autour de l'axe z.



$$M = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ❖ $Rot(z, \theta_z) = R$: Rotation pure $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe z

$$R = \begin{pmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

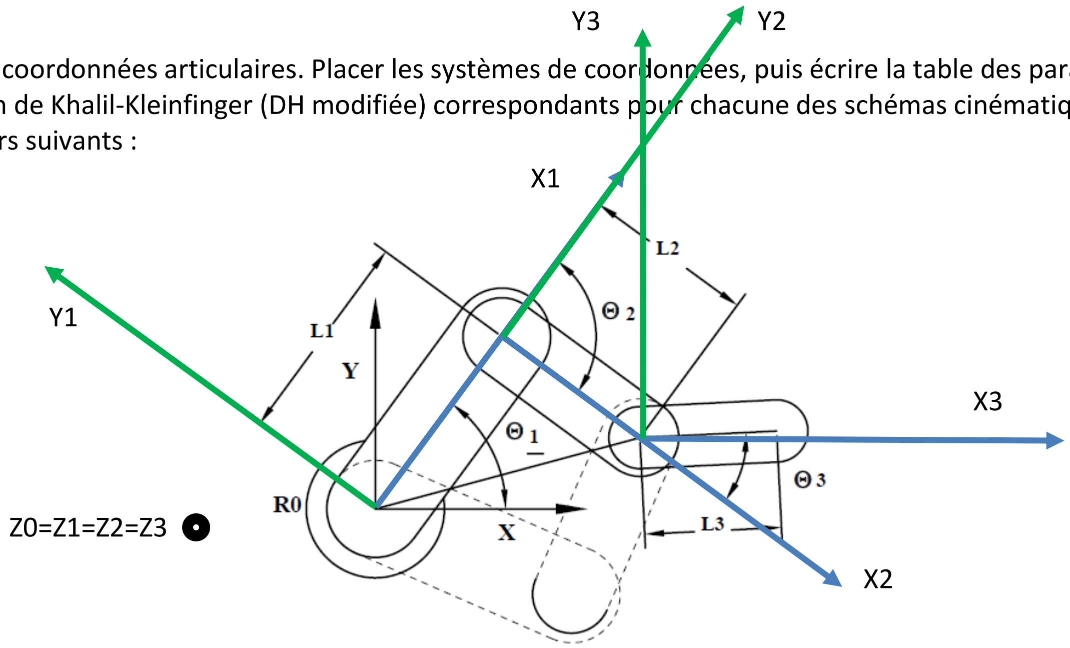
- ❖ $Tr(a, b, c) = P$: translation pure $(0, \quad 0, \quad 1)^T$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

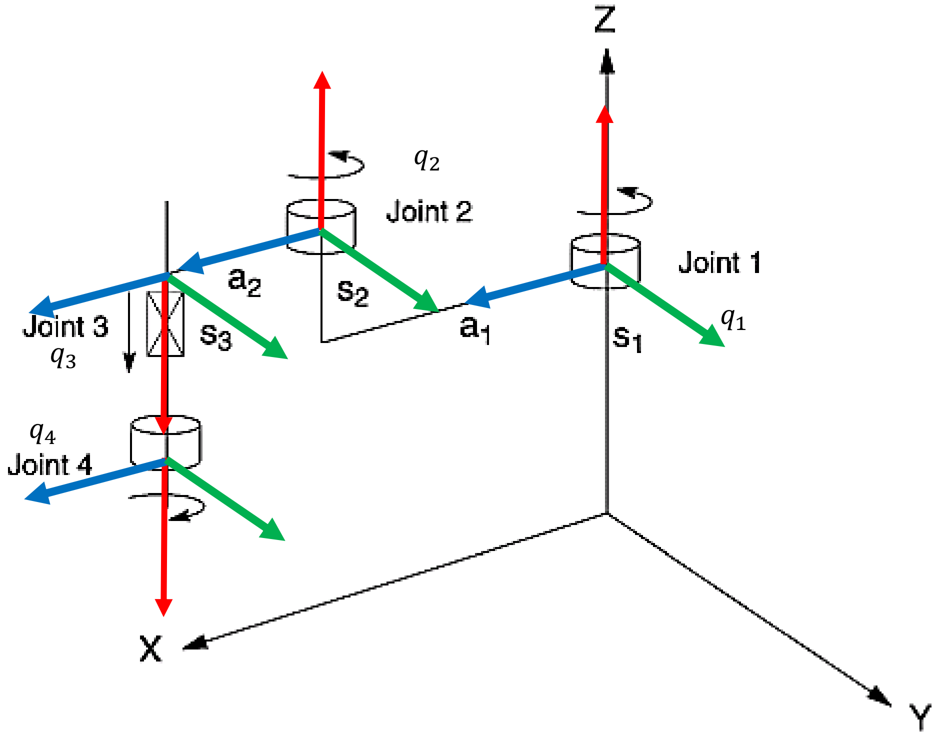
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice N°5

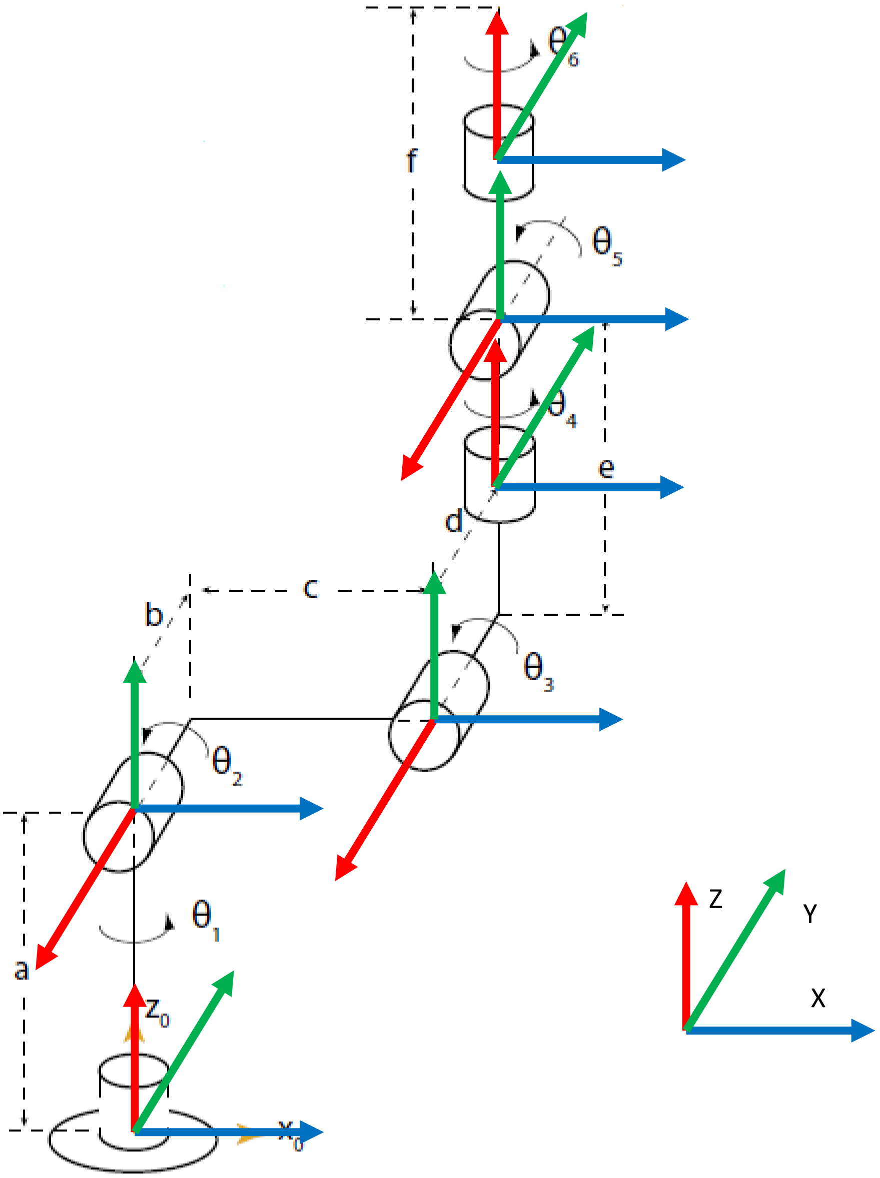
Identifier les coordonnées articulaires. Placer les systèmes de coordonnées, puis écrire la table des paramètres selon la convention de Khalil-Kleinfinger (DH modifiée) correspondants pour chacune des schémas cinématiques des manipulateurs suivants :



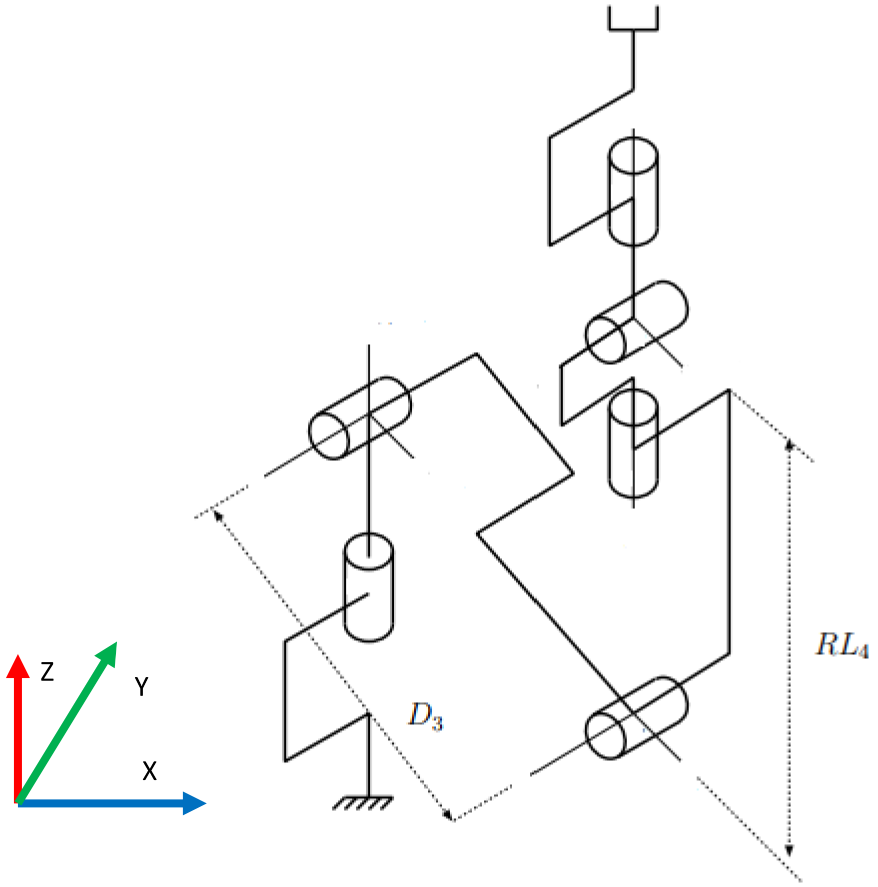
	σ_i	r_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
Articulation 1	0	0	0	0	θ_1
Articulation 2	0	L_1	0	0	θ_2
Articulation 3	0	L_2	0	0	θ_3



	σ_i	r_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
Articulation 1	0	0	0	S_1	q_1
Articulation 2	0	a_1	0	S_2	q_2
Articulation 3	1	a_2	π	0	q_3
Articulation 4	0	0	0	S_3	q_4



	σ_i	r_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
Articulation 1	0	0	0	0	θ_1
Articulation 2	0	0	$\frac{\pi}{2}$	a	θ_2
Articulation 3	0	c	0	b	θ_3
Articulation 4	0	0	$\frac{\pi}{2}$	e1	θ_4
Articulation 5	0	0	$\frac{\pi}{2}$	e2	θ_5
Articulation 6	0	0	$\frac{\pi}{2}$	f	θ_6



	σ_i	r_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
Articulation 1					
Articulation 2					
Articulation 3					
Articulation 4					
Articulation 5					
Articulation 6					